CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1981

●

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES II

Durée : 4 heures

Lundi 11 mai 1981 de 8 heures à 12 heures

●

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants ; chacun d'eux comptera pour moitié dans la note finale

PREMIER PROBLEME

1. On désigne par A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, par $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices carrées S d'ordre 2 telles que ${}^tSA = AS^{-1}$ (${}^tS$ désigne la matrice transposée de S et S^{-1} la matrice inverse de S). Montrer que $\mathcal{S}$ est un groupe multiplicatif.

Expliciter les matrices S telles que dét $S = +1$ (dét S désigne le déterminant de S).

2. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & -5b \\ b & 3b + a \end{pmatrix} \qquad a \text{ et } b \text{ réels}$$

Montrer que $\mathcal{M}$ est un corps commutatif (pour la somme et le produit ordinaire des matrices).

3. Montrer que $\mathcal{M}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et donner une base de cet espace.

4. Montrer que les matrices M dont le déterminant est égal à $+1$ (et $M \in \mathcal{M}$) forment un groupe commutatif multiplicatif. Est-ce un sous-corps de $\mathcal{M}$?

T.S.V.P.

DEUXIEME PROBLEME

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout vecteur $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ on associe la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et on considère la forme bi-linéaire et symétrique φ définie par $(\vec{x}, \vec{y}) \to \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = {}^tXAY$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de E formée de vecteurs propres de A et orthonormée pour φ (c'est-à-dire $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = \varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 1$ et $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$).

Quelle est la matrice de φ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$? Déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

2. Dans le plan affine rapporté au repère $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on considère les droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$D(x,y) \equiv ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad D'(x,y) \equiv a'x + b'y + c' = 0 .$$

On dira que (D) et (D') sont φ–orthogonales si elles sont parallèles à des vecteurs $\vec{\delta}$ et $\vec{\delta}'$ tels que $\varphi(\vec{\delta}, \vec{\delta}') = 0$. Expliciter, en fonction de a, b, a', b' la condition pour que (D) et (D') soient φ–orthogonales.

3. Soit (D'') une troisième droite du plan d'équation $D''(x,y) \equiv a''x + b''y + c'' = 0$.

On suppose que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul et on désigne par (Δ) (Δ') (Δ'') les trois droites d'équations respectives

$$D'(x,y) + h\ D''(x,y) = 0$$
$$D''(x,y) + h'\ D(x,y) = 0$$
$$D(x,y) + h''\ D'(x,y) = 0$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante vérifiée par h, h' et h'' pour que (Δ), (Δ') et (Δ'') soient concourantes (ou parallèles).

4. En appelant φ–hauteur d'un triangle la droite menée d'un sommet et φ–orthogonale au côté opposé, démontrer que les trois φ–hauteurs d'un triangle sont concourantes.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail